

7. cvičení - teorie

Extrémy a Lagrangeovy multiplikátory

Definice. Necht' $M \subset \mathbb{R}^n$, $x \in M$, f je funkce t.ž. $M \subset D(f)$. Řekneme, že f nabývá v bodě x

- **maxima na** M , pokud $\forall y \in M: f(x) \geq f(y)$.
- **lokálního maxima vzhledem k** M , existuje-li $\delta > 0$ t.ž. $\forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(x) \geq f(y)$.

Analogicky se definuje **(lokální) minimum**.

Fakt. Je-li f spojitá, potom je $\sup_M f = \sup_{\overline{M}} f$ a $\inf_M f = \inf_{\overline{M}} f$.

Značení. Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$, budeme značit **řezy množiny** M následujícím způsobem:

$$M_x = \{y \in \mathbb{R}: [x, y] \in M\}, x \in \mathbb{R},$$

$$M^y = \{x \in \mathbb{R}: [x, y] \in M\}, y \in \mathbb{R}.$$

Věta 14 (o nabývání extrémů). Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná kompaktní množina a $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, pak f na M nabývá svého maxima i minima.

Věta 16 (nutná podmínka lokálního extrému). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je ot. mn., $a \in G$ a funkce $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ má v a lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje, nebo je rovna nule.

Poznámka. Věta 16 nám dává body podezřelé z lokálních extrémů a pouze na otevřené množině G - proto je potřeba si ještě hlídat hranice množiny apod.

Definice (gradient). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $g \in C^1(G)$. Pak

$$\nabla g(x) = (g'_{x_1}(x), \dots, g'_{x_n}(x)), \quad x \in G.$$

Jde tedy o vektor parciálních derivací funkce g .

Věta 24 (Lagrangeova věta o multiplikátoru). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G: g(x) = 0\}$ a necht' $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) $\nabla g(\tilde{x}) = \mathbf{o}$,

(II) existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \lambda \nabla g(\tilde{x}) = \mathbf{o}$.

Věta 25 (Lagrangeova věta o dvou multiplikátorech). Necht' $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $f, g_1, g_2 \in C^1(G)$. Označme $M = \{x \in G: g_1(x) = g_2(x) = 0\}$ a necht' bod $\tilde{x} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M . Potom je splněna alespoň jedna z podmínek:

(I) $\nabla g_1(\tilde{x}), \nabla g_2(\tilde{x})$ jsou lineárně závislé - tj. $\nabla g_2(\tilde{x}) = 0$ nebo existuje $k \in \mathbb{R}$ t.ž. $\nabla g_1(\tilde{x}) = k \cdot \nabla g_2(\tilde{x})$

(II) existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňující $\nabla f(\tilde{x}) + \alpha \nabla g_1(\tilde{x}) + \beta \nabla g_2(\tilde{x}) = \mathbf{o}$.

Návod

- vyšetřím kompaktnost M - Věta 14
- vyšetřím f na $\text{Int } M$ - Věta 16
- vyšetřím f na $H(M)$
 - multiplikátory - Věty 24, 25 (pozor je potřeba, aby G otevřená $\implies$ řešíme na $\text{Int } G$ a případně vyšetříme zvlášť f na $H(G)$)
 - bod $H(M)$ lze vyjádřit jako bod závislý na méně proměnných (parametrizace) $\implies$ dosadím jej do f a zkoumám dál
- porovnám hodnoty ve všech bodech podezřelých z extrémů a vyberu největší a nejmenší.
 - M komp. $\implies$ jde o maxima a minima
 - M omezená, ale ne komp. $\implies$ zkoumám na $\overline{M}$ a pokud extrémy vyjdou v bodech, které nejsou v M , tak jde pouze o infima/suprema
 - M neomezená $\implies$ je třeba nějakým trikem ukázat, že jde skutečně o maximum/minimum (odhady, pomocí derivací apod.).

Kompakty a otevřené množiny

Věta 2, 5 (vlastnosti otevřených a uzavřených množin). V $\mathbb{R}^n$ platí:

- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolné sjednocení otevřených, konečný průnik otevřených jsou **otevřené** množiny
- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolný průnik uzavřených, konečné sjednocení uzavřených jsou **uzavřené** množiny

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- množiny $[f > c], [f < c]$ jsou otevřené,
- množiny $[f \leq c], [f \geq c], [f = c]$ jsou uzavřené.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, pokud existuje $r > 0$ t.ž. $M \subset B(0, r)$.

Věta 12 (Charakterizace kompaktních množin). Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.